Concours des 21, 22 et 23 mai 1990 d'admission en 1ère année à L'INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

Mathématiques

(option M)

Corrigé

Partie I

1. (a) Par définition on a, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{ij} = (\delta_{ki}\delta_{lj})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
Soit $(u,v) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient de la ligne u et de la colonne v, de $E_{ij}E_{h,k}$ est

$$\sum_{w=1}^{n}(\delta_{ui}\delta_{wj})(\delta_{wh}\delta_{vk}) = \delta_{ui}\delta_{vk}\sum_{w=1}^{n}\delta_{wj}\delta_{wh} = \delta_{ui}\delta_{vk}\delta_{jh}. \text{ (obtenu pour } w=j).$$

Ce coefficient est aussi celui de $\delta_{jh}E_{ik}$ ce qui démontre le résultat :

$$E_{ij}E_{hk} = \delta_{jh}E_{ik}.$$

(b) $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors A s'écrit d'une manière unique dans cette base : $A = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}E_{ij}$.

(c) Si $i \neq j$, $\det(I_n + \lambda E_{ij}) = 1$, car $I_n + \lambda E_{ij}$ est une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale.

(d) Avec $i \neq j$, $j \neq h$ et $h \neq k$, on a :

$$(I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk}) = I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} = I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk}$$

On en déduit $(I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij}) = I_n$, donc $I_n + \lambda E_{ij}$ est inversible d'inverse $I_n - \lambda E_{ij}$.

2. (a) Soit $i \neq j$ et $A = \sum_{1\leq h,k\leq n} a_{hk}E_{hk}$. Alors $(I_n + \lambda E_{ij})A = A + \lambda E_{ij}A$ avec

$$\lambda E_{ij}A = \lambda \sum_{1\leq h,k\leq n} a_{hk}E_{ij}E_{hk} = \lambda \sum_{1\leq h,k\leq n} a_{hk}\delta_{jh}E_{ik} = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}.$$

Or $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la i-ème ligne, qui sont ceux de la j-ème ligne de A.
Ainsi, $(I_n + \lambda E_{ij})A$ est la matrice obtenue à partir de A par le remplacement de la ligne L_i par la ligne $L_i + \lambda L_j$

(b) On trouve de même que la matrice $A(I_n + \lambda E_{ij})$ est celle obtenue à partir de A par le remplacement de la colonne C_i par la colonne $C_i + \lambda C_j$.
On peut aussi utiliser la relation : ${}^t((I_n + \lambda E_{ij})A) = {}^t(I_n + \lambda E_{ij}){}^tA = (I_n + \lambda E_{ji}){}^tA$ et se ramener ainsi au cas précédent.

3. **Premier cas :** $a_{11} = 1$: Les opérations $L_i \leftarrow L_i - a_{i1}L_1$ ($2 \leq i \leq n$) et $C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$ ($2 \leq j \leq n$) transforment A en une matrice B de la forme $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède, $B = PAQ$ où $P = \prod_{i=2}^{n}(I_n + a_{i1}E_{i1})$ et $Q = \prod_{j=2}^{n}(I_n + a_{1j}E_{1j})$ ce qui donne le résultat demandée.

Deuxième cas :

○ Il existe $i > 1$ tel que $a_{i1} \neq 0$: Alors l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1 - a_{11}}{a_{i1}}L_i$ transforme A en une matrice $A' = (a'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ du type précédent.

Ainsi, $B = PAQ$, où $P = \prod_{i=2}^{n}(I_n + a_{i1}E_{i1})\left(I_n + \dfrac{1-a_{11}}{a_{i1}}E_{i1}\right)$ et $Q = \prod_{i=2}^{n}(I_n + a'_{i1}E_{i1})$, sera du type voulu.

○ Il existe $j > 1$ tel que $a_{1j} \neq 0$. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \dfrac{1-a_{11}}{a_{1j}}C_j$ nous ramène là encore au premier cas, et on conclut comme ci-dessus.

Troisième cas : $a_{11} \neq 1$ et $\forall i \geq 2\ a_{i1} = 0$ et $\forall j \geq 2\ a_{1j} = 0$: L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ (multiplication à gauche par $I_n + E_{21}$) nous ramène au deuxième cas, ce qui achève la démonstration.

4. Remarquons d'abord que la multiplication à droite ou à gauche d'une matrice par une matrice de transvection ne change pas le déterminant.

• Cas $n = 2$:

○ Si la première ligne ou la première colonne de A n'est pas nulle, la question précédente donne : il existe P, Q, produits de matrices de transvection d'ordre 2, telles que $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = B$ et $\det(B) = \det(A) = b$. Cela donne le résultat. (le cas $r = 1$ correspondant au cas $b = 0$)

○ Sinon, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ nous ramène au cas précédent (car $A \neq 0$).

• Supposons le résultat démontré à l'ordre $n - 1 \geq 2$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}(A) = r \geq 1$.

○ Si la première ligne ou la première colonne de A n'est pas nulle, il existe P, Q produit de matrices de transvection d'ordre n, telles que $A = PAQ = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(A) = r$ et $\det(B) = \det(B') = \det(A)$.

On a $B' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{rg}(B') = r - 1$.

▷ Si $\operatorname{rg}(B') = 0$, c'est-à-dire si $r = 1$, on a directement le résultat voulu.

▷ Sinon, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer qu'il existe P_1, Q_1, produit de matrices de transvection d'ordre $n - 1$, telles que $P_1 B' Q_1 = B_1$ avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \operatorname{rg}(B_1) < n - 1$$

et

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & (0) & & \det(B_1) \end{pmatrix} \text{ si } \operatorname{rg}(B_1) = n - 1 \text{ (et } \det(B_1) = \det(B') = \det(A) \text{).}$$

En notant $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, on vérifie alors facilement, en effectuant le produit par blocs :

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1B'Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Soit $P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & 1 & \\ 0 & & & \det(A) \end{pmatrix}$ si $\mathrm{rg}(B) = n-1$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A) = n$, et

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

sinon.

On obtient alors le résultat à l'ordre n, en remarquant que si P_1 et Q_1 sont des produits de matrices de transvection d'ordre $n-1$, P' et Q' sont encore des produits de matrices de transvection d'ordre n (car, si T est une matrice de transvection d'ordre $n-1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$ est une matrice de transvection d'ordre n).

○ Le cas où la première ligne et la première colonne de A sont nulles se ramène au cas précédent, à l'aide de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ où L_i est une ligne non nulle de A (il en existe car $A \neq 0$).

5. D'après ce qui précède, si A est une matrice carrée de déterminant 1(leur ensemble forme un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, noté $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$), il existe P, Q produit de matrices de transvection telles que $I_n = PAQ$ soit $A = P^{-1}Q^{-1}$.

P^{-1}, Q^{-1} étant elles aussi des produit de matrices de transvection, A est donc produit de matrices de transvection. Donc $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection.

6. (a) Calculons $A = (I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk})(I_n + \lambda E_{ij})^{-1}(I_n + \lambda E_{hk})^{-1}$ en supposant $i \neq j$ et $h \neq k$. On a :

$$\begin{aligned} A &= (I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk})(I_n - \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{hk}) \\ &= (I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik})(I_n - \lambda E_{ij} - \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik}) \\ &= I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} - \lambda E_{ij} - \lambda^2 E_{ij}^2 - \lambda\mu\delta_{ik}E_{hj} - \lambda^2\mu\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ij} \\ &\quad -\mu E_{hk} - \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} - \lambda\mu^2\delta_{jh}\delta_{kh}E_{ih} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} \\ &\quad \lambda^2\mu\delta_{jh}\delta_{ji}E_{ik} + \lambda\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{hk} + \lambda^2\mu^2\delta_{jh}\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ik} \\ &= I_n + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} - \lambda\mu\delta_{ik}E_{hj} - \lambda^2\mu\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ij} + \lambda\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{hk} + \lambda^2\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ik} \end{aligned}$$

En supposant $i \neq k$, on a $A = I_n + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik}$ puis, pour $h = j$: $A = I_n + \lambda\mu E_{ik}$ (il est possible de trouver $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$ tel que $i \neq j$, $i \neq k$ et $j \neq k$ car $n \geq 3$). Il suffit donc ensuite de choisir $i = \alpha$, $k = \beta$ et $\lambda\mu = a$ pour obtenir $A = I_n + aE_{\alpha\beta}$.

(b) Soit $A = I_n + aE_{\alpha\beta}$ avec $\alpha \neq \beta$ une matrice de transvection, et i, j, h, k, λ, μ comme ci-dessus. On a alors :

$$f(A) = f(I_n + \lambda E_{ij})f(I_n + \mu E_{ij})f((I_n + \lambda E_{ij})^{-1})f((I_n + \lambda E_{ij})^{-1}).$$

Donc

$$f(A) = f(I_n + \lambda E_{ij})f((I_n + \lambda E_{ij})^{-1})f(I_n + \mu E_{ij})f((I_n + \lambda E_{ij})^{-1})$$

$$f(A) = f\left[(I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \lambda E_{ij})^{-1}\right] f\left[(I_n + \mu E_{ij})(I_n + \lambda E_{ij})^{-1}\right] = f(I_n)f(I_n)$$

Or $f(I_n) = 1$, d'où $f(A) = 1$.

(c) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe P et Q produits de matrice de transvection, telles que $B = PAQ$ soit diagonale, de la forme décrite à la question **4.**, donc $f(B) = \det(A)$.
D'autre part, on a $f(B) = f(P)f(A)f(Q) = 1 \times f(A) \times 1$, d'où $f(A) = \det(A)$.

Partie II

1. $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$, donc l'application tr est linéaire.

Posons $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $C = AB = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ avec $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. On a

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik} = \operatorname{tr}(BA).$$

2. (a) Soit $i \neq j$. On a $\sigma(E_{ij}E_{ii}) = \sigma(0) = 0$ car σ est linéaire. D'où $0 = \sigma(E_{ii}E_{ij}) = \sigma(E_{ij}) = 0$.

(b) $\sigma(E_{ij}E_{ji}) = \sigma(E_{ji}E_{ij})$, d'où $\sigma(E_{ii}) = \sigma(E_{jj})$ pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

(c) Notons λ la valeur commune des $\sigma(E_{ii})$ pour $1 \le i \le n$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}E_{ij}$. σ étant linéaire, donc :

$$\sigma(M) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}\sigma(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}\sigma(E_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ii}.$$

En conclusion, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma(M) = \lambda \operatorname{tr}(M)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, donc $\forall M \in \mathscr{T}$, $\operatorname{tr}(M) = 0$, car M est combinaison linéaire de matrices de la forme $AB - BA$, et tr est une forme linéaire.
Notons $\mathscr{T}' = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$, on a donc $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$. De plus, $\dim \mathscr{T}' = n^2 - 1$ puisque $\mathscr{T}'$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Donc $\dim \mathscr{T} \le n^2 - 1$.
D'autre part : si $i \neq j$: $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii} \in \mathscr{T}$ et si $i \in [\![2,n]\!]$, $E_{11} - E_{ii} = E_{1i}E_{i1} - E_{i1}E_{1i} \in \mathscr{T}$. Donc $\mathscr{T}$ contient, en particulier, les $n^2 - 1$ matrices $(E_{ij})_{i\neq j}$ et $(E_{11} - E_{ii})_{2\le i\le n}$. Ces matrices étant linéairement indépendantes, il en résulte que $\dim \mathscr{T} \ge n^2 - 1$.
Finalement $\dim \mathscr{T} = n^2 - 1$ et donc $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.
Puisque $I_n \notin \mathscr{T}' = \mathscr{T}$, la droite vectorielle engendrée par I_n est bien un supplémentaire de $\mathscr{T}$ et donc

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{T} \oplus \mathscr{H}.$$

4. On trouve, comme dans la question **I.6.(a)**,

$$F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk} = I_n + E_{ij} - \delta_{ik}E_{hj} + \delta_{jh}E_{ik} - \delta_{ik}\delta_{jh}E_{hk}.$$

5. On a alors :

$$\theta\left(F_{hk}^{-1}F_{ij}F_{hk}\right) = \theta\left(F_{ij}F_{hk}F_{hk}^{-1}\right) = \theta(F_{ij}).$$

D'où :

$$\theta(F_{ij}) = \theta(F_{ij}) - \delta_{ik}\theta(E_{hj}) + \delta_{jh}\theta(E_{ik}) - \delta_{ik}\delta_{jh}\theta(E_{hk})$$

Donc

$$-\delta_{ik}\theta(E_{hj}) + \delta_{jh}\theta(E_{ik}) - \delta_{ik}\delta_{jh}\theta(E_{hk}) = 0.$$

Pour $i = j = h$ et $i \neq k$, on obtient : $\theta(E_{ik}) = 0$.
Pour $i = k$, $j = h$ et $i \neq j$, on obtient $\theta(E_{ii}) - \theta(E_{jj}) = \theta(E_{hk}) = 0$, donc $\theta(E_{ii}) = \theta(E_{jj})$.

Notons λ la valeur commune des $\theta(E_{ii})$ pour $1 \le i \le n$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}E_{ij}$. θ étant linéaire, donc :

$$\theta(M) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}\theta(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}\theta(E_{ii})$$

Si $\lambda = \dfrac{1}{n}\theta(I_n)$, alors θ et $\lambda\,\mathrm{tr}$ coïncident sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathscr{H}$. Donc $\theta(M) = \lambda\,\mathrm{tr}(M)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie III

1. Le caractère morphique de A_g résulte des règles de calcul dans une algèbre sa bijectivité provient de l'égalité :

$$A_g \circ A_{g^{-1}} = A_{g^{-1}} \circ A_g = id_{L(E)}.$$

On montre facilement que χ est morphisme du groupe $\mathbf{GL}(E)$ dans le groupe $\boldsymbol{Aut}(E)$. L'application χ est non injective puisque son noyau contient les homothéties de rapports non nuls.

2. (a) Vérifions que g est homothétie, en effet, soient x et y de E, alors il existe λ_x, λ_y et λ_{x+y} des scalaires tels que

$$g(x) = \lambda_x x,\ g(y) = \lambda_y y \text{ et } g(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y).$$

Si x et y sont libres, la condition $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$ implique $\lambda_y = \lambda_x$, et si $y = \alpha x$, alors

$$g(y) = g(\alpha x) = \alpha g(x) = \alpha\lambda_x x = \lambda_y y = \lambda_y \alpha x,$$

donc $\lambda_y = \lambda_x$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $g(x) = \lambda x$, c'est-à-dire g est une homothétie de rapport λ.

(b) Le noyau de χ est $\ker(\chi) = \chi^{-1}\left(\mathbf{Id}_{\mathscr{L}(E)}\right)$. Soit

$$\begin{aligned}\ker(\chi) &= \left\{ g \in \mathbf{GL}(E) \;\middle|\; A_g = \mathbf{Id}_{\mathscr{L}(E)} \right\} \\ &= \left\{ g \in \mathbf{GL}(E) \;\middle|\; \forall u \in \mathscr{L}(E),\ \ g \circ u \circ g^{-1} = u \right\} \\ &= \{ g \in \mathbf{GL}(E) \mid \forall u \in \mathscr{L}(E),\ \ g \circ u = u \circ g \}\end{aligned}$$

Soit $g \in \ker(\chi)$, $x \in E \setminus \{0\}$, H un hyperplan supplémentaire de $\mathbb{R}x$ et u la symétrie par rapport à $\mathbb{R}x$, de direction H. On a $g \circ u = u \circ g$; d'où $g(u(x)) = u(g(x))$ ou encore $g(x) = u(g(x))$. Donc $g(x)$ est invariant par u, donc $g(x) \in \mathbb{R}x$. Ainsi, x et $g(x)$ sont colinéaires, le résultat est vrai même pour $x = 0$. On en déduit que g est un homothétie. Réciproquement, il est facile de vérifier que si g est une homothétie, alors $\chi(g) = 0$. D'où :

$$\ker(\chi) = \{ \lambda \mathbf{Id}_E \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

3. (a) La linéarité de $u_{\varphi,x}$ découle de celle de φ. Si $x = 0$, $u_{\varphi,x}$ est nulle. Supposons x est non nul. On a $\forall y \in E$, $u_{\varphi,x}(y) \in \mathrm{Vect}\,(x)$, de plus si φ est non nul, $x \in \mathrm{Im}\,(u_{\varphi,x})$. D'où $\mathrm{Im}\,(u_{\varphi,x}) = \mathrm{Vect}(x)$ et $\ker\,(u_{\varphi,x}) = \ker(\varphi)$ est un hyperplan de E.
Si $\varphi = 0$, alors $\mathrm{Im}\,(u_{\varphi,x}) = \{0\}$ et $\ker\,(u_{\varphi,x}) = E$.

(b) Pour tout vecteur $y \in E$, on a :

$$u^2_{(\varphi,x)}(y) = \varphi(y)\varphi(x)x.$$

Donc $u_{\varphi,x}$ soit un projecteur non nul si et seulement si φ est non nul et $\varphi(x) = 1$.

4. (a) On remarque que $\forall x \in E$, on a $u_{ij}(x) = u_{e_j^*,e_i}(x) = e_j^*(x)e_i$, ce qui donne en particulier :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ u_{ij}(e_k) = e_j^*(e_k)e_i = \delta_{jk}e_i.$$

Ainsi, la matrice de u_{ij} dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est E_{ij} et par conséquent $u_{ij}u_{hk} = \delta_{jh}u_{ik}$.

(b) C'est une base de $\mathscr{L}(E)$ comme image réciproque de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par l'isomorphisme qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

5. (a) $\preceq$ est une relation d'ordre. En effet, l'antisymétrie et la réflexivité découlent de définition, la transitivité résulte de ce que pour tout p tout q et tout r éléments de $\mathscr{P}$, si $r \preceq p$ et si $p \preceq q$ alors :

$$r = r \circ p = p \circ r \Rightarrow r = r \circ (p \circ q) = (q \circ p) \circ r \Rightarrow r = r \circ q = q \circ r.$$

Donc $r \preceq q$.
Cette une relation d'ordre non totale, si p est le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ suivant $\mathrm{Vect}(e_2, ..., e_n)$ et q est le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_n)$ suivant $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$, $p \circ q(e_1) = 0 \neq p(e_1)$ et $q \circ p(e_n) = 0 \neq q(e_n)$.

(b) Supposons i). Soit $q \preceq p$.
De $p \circ q = q$ on déduit $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$, donc $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p)$ (puisque q est non nul et $\dim(\mathrm{Im}(p)) = 1$).
De $\circ qp = q$ on déduit $\ker(p) \subset \ker(q)$ et donc $\ker(p) = \ker(q)$ (par la formule du rang). Finalement $q = p$, d'où ii).
Supposons ii). Si p n'était pas de rang 1, en notant F son image G son noyau et D une droite de F et F' un supplémentaire de D dans F, le projecteur q sur D suivant $F' \oplus G$ vérifiait $q \preceq p$ et $q \neq p$ contredisant ii). Donc i) est vrai.
D'où l'équivalence de i) et de ii).
Passons à celle de ii) et de iii). Un projecteur non nul de la forme $u_{\varphi,x}$ est de rang 1 (d'après **3.(a)**), si p est un projecteur de rang 1, en notant x un vecteur directeur de son image et G son noyau, $p = u_{\varphi,x}$, avec φ la forme linéaire nulle sur G et valant 1 en x.

6. (a) Soit $p \in \mathscr{P}$, on a $A(p) \circ A(p) = A(p \circ p) = A(p)$, donc $A(p)$ est un projecteur.
(b) On suppose que p est un élément minimal de $\mathscr{P}$ pour la relation $\preceq$. Soit q' un élément de $\mathscr{P}$ tel que $q' \preceq A(p)$. On pose $q = A^{-1}(q')$. De $A(q) \circ A(p) = A(q \circ p) = A(q)$ on déduit $A(q \circ p) = A(p \circ q) = A(q)$ puis $q \circ p = p \circ q = q$ et par la minimalité de p, $q = p$, donc $q' = A(p)$.
Ainsi, $A(p)$ est encore un élément minimal de $\mathscr{P}$ pour la relation $\preceq$.
(c) Les applications u_{ii} sont des projecteurs de rang 1, donc des éléments minimaux de $\mathscr{P}$. D'après ce qui précède, $A(u_{ii})$ est aussi un élément minimal de $\mathscr{P}$, donc, d'après **5.**, il existe $(\varphi_i, \varepsilon_i) \in E^* \times E$ tel que $A(u_{ii}) = u_{\varphi_i,\varepsilon_i}$ et $\varphi_i(\varepsilon_i) = 1$ pour tout i.
(d) Soit (i, j) un couple d'éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$A(u_{ii}) \circ A(u_{jj}) = A(u_{ii} \circ u_{jj}) = \delta_{ij} A(u_{ii}).$$

En appliquant à ε_j, on obtient :

$$\varphi_i(\varepsilon_j)\varepsilon_i = \delta_{ij}\varphi_i(\varepsilon_j)\varepsilon_i = \delta_{ij}\varphi_i(\varepsilon_i)\varepsilon_i = \delta_{ij}\varepsilon_i.$$

On en déduit que la famille $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ est libre, donc que c'est une base et que $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ est sa base duale.

7. Soit un couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, ..., n\}$.
(a) On a :

$$A(u_{ij}) \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_k} = A(u_{ij}) \circ A(u_{kk}) = \delta_{jk} A(u_{ik}).$$

Donc pour tout élément k de $\{1, 2, ..., n\}$ distinct de j, $A(u_{ij})(\varepsilon_k) = A(u_{ij}) \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_k}(\varepsilon_k) = 0$. Donc le noyau de $A(u_{ij})$ contient l'hyperplan $\mathrm{Vect}(\varepsilon_k)_{k=1,2,...,n, k\neq j}$, c'est même cet hyperplan puisque u_{ij} étant non nul et A un automorphisme $A(u_{ij})$ est non nul. La formule du rang donne que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
(b) On a :

$$A(u_{ij}) \circ A(u_{ji}) = A(u_{ij} \circ u_{ji}) = A(u_{ii}) = u_{\varphi_i,\varepsilon_i}.$$

Donc on peut déduire que l'image de $A(u_{ij})$ contient ε_i (en appliquant à ce vecteur l'égalité précédente) et donc l'image de $A(u_{ij})$, de dimension 1, est la droite engendrée par ε_i.
(c) On a $A(u_{ij}) = \lambda_{ij} u_{\varphi_j,\varepsilon_i}$, où $\lambda_{ij} = A(u_{ij})(\varepsilon_j)$. Se vérifie sur les vecteurs de la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$.

8. (a) D'une part :

$$A(u_{ij}) \circ A(u_{jk}) = A(u_{ik}) = \lambda_{ik} u_{\varphi_k,\varepsilon_i}.$$

D'autre part

$$A(u_{ij}) \circ A(u_{jk}) = \lambda_{ij}\lambda_{jk} u_{\varphi_j,\varepsilon_i} \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_j}.$$

Or $u_{\varphi_j,\varepsilon_i} \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_j}$ vaut $u_{\varphi_k,\varepsilon_j}$ (les images des vecteurs de la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ par ces deux endomorphismes sont égales). Donc $\lambda_{ij}\lambda_{jk} = \lambda_{i,k}$.
(b) D'où immédiatement, $\lambda_{ij} = \dfrac{\lambda_{i1}}{\lambda_{j1}}$ puisque $\lambda_{i1} \neq 0$.

9. (a) On pose, pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\alpha_i = \lambda_{1i}\varepsilon_i$, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ est alors une base de E dont la base duale $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, ..., \alpha_n^*)$ est donnée par $\alpha_j^* = \dfrac{1}{\lambda_{1j}}\varphi_j$, pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$ (d'après **6.(d)**). Donc d'après la question **8.**,

$$A(u_{ij}) = u_{\alpha_j^*,\alpha_i}.$$

(b) Notons g l'endomorphisme de E défini par $g(e_i) = \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Alors,

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \;\; A(u_{ij})(\alpha_k) = \alpha_j^*(\alpha_k)\alpha_i = \delta_{jk}\alpha_i$$

et

$$g \circ u_{ij} \circ g^{-1}(\alpha_k) = g \circ u_{ij}(e_k) = g\left(u_{e_j^*, e_i}(e_k)\right) = g\left(e_j^*(e_k)e_i\right) = \delta_{jk} g(e_i) = \delta_{jk}\alpha_i.$$

Ainsi, $A(u_{ij}) = g \circ u_{ij} \circ g^{-1}$ puisque coïncident sur la base $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

(c) Puisque $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathscr{L}(E)$, on en déduit $A = A_g$, c'est-à-dire il existe $g \in \mathbf{GL}(E)$ tel que $\forall u \in \mathscr{L}(E)$, $A(u) = g \circ u \circ g^{-1}$.
Autrement dit, tous les automorphismes de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$ sont des automorphismes intérieures, ou encore l'application :

$$\chi : g \mapsto A_g$$

est injective de $\mathbf{GL}(E)$ dans $\boldsymbol{Aut}(\mathscr{L}(E))$.

10. D'après la question précédente, il faut déterminer les formes linéaires sur $\mathscr{L}(E)$ telles que

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \;\; \forall g \in \mathbf{GL}(E), \;\; \varphi(g \circ u \circ g^{-1}) = \varphi(u).$$

Or, pour tout v de $\mathscr{L}(E)$, pour tout $g \in \mathbf{GL}(E)$, il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $ug^{-1} = v$, soit $u = vg$. ce qui précède équivaut donc à :

$$\forall v \in \mathscr{L}(E), \forall g \in \mathbf{GL}(E), \;\; \varphi(g \circ v) = \varphi(v \circ g).$$

D'après la question **.5** de la deuxième partie, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall u \in \mathscr{L}(E)$, $\varphi(u) = \lambda \operatorname{tr}(u)$.

●●●●●●●●●●●